Aufgabenblatt 6
Donnerstag $15^{15} - 16^{45}$

Sascha Reinhardt

29. November 1999

1 Aufgabe 6.1

Es muß die Energieerhaltung gelten:

$$
\begin{aligned}
E_{vor} &= E_{nach} && (1)\\
E_{vor} &= \frac{\hbar^2 k^2}{2M_n} && (2)\\
E_{nach} &= \frac{\hbar^2 k'^2}{2M_n} + x && (3)\\
\mathbf{K} &= \frac{2\pi}{\lambda_0}\hat{x} && (4)\\
\mathbf{k}' &= \frac{2\pi}{\lambda}\frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}}) && (5)\\
\lambda_0 &= 3,5\mathring{A} && (6)\\
\lambda &= 2,5\mathring{A} && (7)\\
M_n &= 1,674928 \cdot 10^{-27} kg, \text{ Neutronenmasse} && (8)
\end{aligned}
$$

Nach einsetzen der Werte und Auflösen nach erhält man:

$$
\begin{aligned}
x &= -0,006eV\\
\Rightarrow \omega &= \frac{|x|}{\hbar} = 9,74 \cdot 10^{12} Hz\\
\nu &= \frac{\omega}{2\pi} = 1,55 \cdot 10^{12} Hz
\end{aligned}
$$

Es wird also ein Phonon vernichtet, das eine Frequenz von $1,55 \cdot 10^{12} Hz$ hatte.

Es muß auch die Impulserhaltung gelten. Formal hingeschrieben:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{K} &= \mathbf{k}' + \mathbf{k} && (9)\\
\mathbf{k} &= \mathbf{K} - \mathbf{k}' && (10)\\
& && (11)
\end{aligned}
$$

Nach Einsetzen der Werte erhält man den Wellenvektor:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{k} &= (0,344, -1,451, -1451)^T \frac{1}{\mathring{A}}\\
k &= 2,081 \frac{1}{\mathring{A}}
\end{aligned}
$$

Der reziproke Gittervektor wird gebraucht um den Impulsübertrag auf das System zu beschreiben.

2 Aufgabe 6.2

Die Zustandsdichte ist aus der Vorlesung bekannt:

$$D(\omega)d\omega = \frac{a^3\omega^2}{2\pi^2 v^3}d\omega$$

Die Anzahl der Phonoen ist

$$N = 3\int_{\omega_1}^{\omega_2} D(\omega)f(\omega,T)d\omega.$$

Einsetzen:

$$N = 3\int_{\nu_1}^{\nu_2} \frac{a^3}{2\pi^2 v^2}\frac{(2\pi\nu)^2}{\exp(h\nu/k_BT)-1}2\pi d\nu$$

Mit $\hbar\omega \ll k_B t$ vereinfacht sich das, da

$$\exp(h\nu/k_BT) \approx 1 + \frac{h\nu}{k_BT}$$

wird.

Das Integral ist damit

$$N = \frac{12\pi a^3 k_BT}{hv^3}\int_{\nu_1}^{\nu_2} \nu d\nu = \frac{6\pi a^3 k_BT}{hv^3}\left[\nu_2^2 - \nu_1^2\right].$$

Mit $\nu_1 = 100MHz, \nu_2 = 101MHz, a^3 = 1cm^3$ und $v = 4000m/s$ ergibt sich

$$N = 3,701 \cdot 10^{11}$$

angeregten Phononen.

Die Energie des Ultraschalls ist auf einer Fläche von $1cm^2$: $1mW \cdot 1\mu s = 1nJ$. Dies wird geteilt durch die Energie eines Phonon, also

$$N' = \frac{1nJ}{h \cdot 100MHz} = 1,509 \cdot 10^{16}$$

Das Verhältnis ist also:

$$\frac{N}{N'} = 2,5 \cdot 10^{-5}$$

3 Aufgabe 6.3

Aus der Digitalen Bildverarbeitung ist bekannt, daß man mindestens zweimal pro Wellenlänge abtasten muß um ein richtiges Bild zu erhalten. Dies kann man mit dem reziproken Gitter ausdrücken, indem man sagt die Wellenlänge kann richtig gemessen werden, wenn sie in der ersten Brillouin- Zone liegt.Die erste B. Z. ist hier von $-\frac{\pi}{\Delta x}$ bis $\frac{\pi}{\Delta x}$.

3.1 a

Die Wellenlänge beträgt $4\Delta x$, wobei Δx der Abstand der Linien auf der Folie ist.

$$\frac{2\pi}{4\Delta x} < \frac{\pi}{\Delta x}$$

Der Wellenvektor liegt vollständig in der ersten B. Z., damit ist die abgetastete Richtung und die abgetaste Phasengeschwindigkeit gleich der wirklichen Richtung und Phasengeschwindigkeit.

3.2 b

Die Wellenlänge beträgt $2\Delta x$.

$$\frac{2\pi}{2\Delta x} = \frac{\pi}{\Delta x}$$

Der Wellenvektor liegt vollständig in der ersten B. Z., d. h. die abgetastete Wellenlänge ist die Wirkliche. Es bildet sich eine stehende Welle, da man den Wellenvektor durch Subtraktion von $\frac{2\pi}{\Delta x}$, auf die andere Grenze der B. Z. projektzieren kann, d. h. man überlagert eine einfallende mit einer ausfallende Welle mit gleicher Wellenlänge und Amplitude, also eine stehende Welle.

3.3 c

Die Wellenlänge beträgt $\frac{20}{21}\Delta x$.

$$\frac{21 \cdot 2\pi}{20\Delta x} > \frac{\pi}{\Delta x}$$

Man muß also die Welle in die B. Z. zurückprojektzieren, also

$$\frac{21 \cdot 2\pi}{20\Delta x} - \frac{20 \cdot 2\pi}{20\Delta x} = \frac{2\pi}{\Delta x \cdot 20}$$

Man erhält also eine Welle mit der Wellenlänge $\lambda = 20\Delta x$. Die Richtung der Phasengeschwindigkeit bleibt gleich.

3.4 d

Die Wellenlänge beträgt $\frac{20}{20}\Delta x$.

$$\frac{20 \cdot 2\pi}{20\Delta x} > \frac{\pi}{\Delta x}$$

Man muß also die Welle in die B. Z. zurückprojektzieren, also

$$\frac{20 \cdot 2\pi}{20\Delta x} - \frac{20 \cdot 2\pi}{20\Delta x} = 0$$

Man erhält also eine Welle mit der Wellenlänge $\lambda = \infty$. Die Information der Richtung der Phasengeschwindigkeit geht verloren.

3.5 e

Die Wellenlänge beträgt $\frac{20}{19}\Delta x$.

$$\frac{19 \cdot 2\pi}{20\Delta x} > \frac{\pi}{\Delta x}$$

Man muß also die Welle in die B. Z. zurückprojektzieren, also

$$\frac{19 \cdot 2\pi}{20\Delta x} - \frac{20 \cdot 2\pi}{20\Delta x} = -\frac{2\pi}{\Delta x \cdot 20}$$

Man erhält also eine Welle mit der Wellenlänge $\lambda = 20\Delta x$. Die Richtung der Phasengeschwindigkeit ist aber entgegengesetzt.

3.6 f

Die Wellenlänge beträgt $\frac{20}{39}\Delta x$.

$$\frac{39 \cdot 2\pi}{20\Delta x} > \frac{\pi}{\Delta x}$$

Man muß also die Welle in die B. Z. zurückprojektzieren (hier muß zweimal abgezogen werden, damit der Wellenvektor wieder in der ersten B. Z. ist), also

$$\frac{39 \cdot 2\pi}{20\Delta x} - \frac{40 \cdot 2\pi}{20\Delta x} = -\frac{2\pi}{\Delta x \cdot 20}$$

Man erhält also eine Welle mit der Wellenlänge $\lambda = 20\Delta x$. Die Richtung der Phasengeschwindigkeit ist aber entgegengesetzt. Man kann diese abgetaste Welle nicht von der abgetasteten Welle in Aufgabe e unterscheiden.