Aufgabenblatt 13
Donnerstag $15^{15} - 16^{45}$

Sascha Reinhardt

13. Februar 2000

1 13.1

Die Zustandsdichte für Magnonen ist gegeben durch

$$D(\omega) = \frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{\hbar}{2JSa^2}\right)^{\frac{3}{2}}\omega^{1/2}V \tag{1}$$

$$a_1 = \frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{\hbar}{2JSa^2}\right)^{\frac{3}{2}}V \tag{2}$$

Daraus läßt sich die innere Energie bestimmen:

$$U = \int_0^\infty D(\omega) < n(\omega) > \hbar\omega d\omega \tag{3}$$

$$U = a_1\hbar\int\frac{\omega^{3/2}}{\exp(\hbar\omega/k_BT)-1}d\omega \tag{4}$$

$$x = \frac{\hbar\omega}{k_BT} \Rightarrow \omega = \frac{k_BT}{\hbar}x \tag{5}$$

$$\Rightarrow d\omega = \frac{k_BT}{\hbar}dx \tag{6}$$

$$\Rightarrow U = a_1\left(\frac{k_BT}{\hbar}\right)^{5/2}\hbar\int\frac{x^{3/2}}{e^x-1}dx \text{ (Substitution)} \tag{7}$$

$$\Rightarrow U = a_1\left(\frac{k_BT}{\hbar}\right)^{5/2}\hbar 1,783 \tag{8}$$

Differenzieren des letzten Ausdruck nach T:

$$C_V = \frac{dU}{dT} \tag{9}$$

$$= a_1\left(\frac{k_B}{\hbar}\right)^{5/2}\hbar 1,783\frac{5}{2}T^{3/2} \tag{10}$$

Dies ist der Beitrag der Spinwellen zur spezifischen Wärmekapazität.

Die spez. Wärmekapazität der Phonen wird für tiefe Temperaturen durch die Debye-Näherung beschrieben:

$$C_{Vp} \approx 234Nk_B\left(\frac{T}{\Theta}\right)^3 \tag{11}$$

Gleichsetzen der beiden spez. Wärmekapazitäten und auflösen nach T ergibt:

$$T = \left(\frac{a_1^2\frac{k_B^5}{\hbar^3}\Theta^6\frac{5^2}{2^2}1,783^2}{234^2N^2k_B^2}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{12}$$

Sei $V = a^3$ und die Anzahl N der Atome im Volumen V gleich zwei (bcc-Gitter (Eisen)), so erhält man $(J = 2 \cdot 10^{-2} eV, \Theta = 500K, S = 1/2)$

$$T = 4,2K$$

Bei dieser Temperatur ist der Beitrag der spez. Wärmekapazitäten gleich.

2 13.2

2.1 a

Die Energie der Wechselwirkung zwischen zwei Atomen mit den Spins $\mathbf{s}_1$ und $\mathbf{s}_2$ ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} U &= -2J\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2 && (13)\\ &= -2Js^2\cos(\alpha) && (14) \end{aligned}$$

Da $N \gg 1$ ist $\pi/N \ll 1$ somit kann der Cosinus entwickelt werden zu $\cos(\alpha) \approx 1 - 1/2\alpha^2$. Eingesetzt in 14 erhält man:

$$\begin{aligned} U &= -2Js^2 + Js^2\alpha^2 && (15)\\ \Rightarrow u &= Js^2\alpha^2, \text{ Austauschenergie pro Paar} && (16)\\ &= Js^2\left(\frac{\pi}{N}\right)^2 && (17) \end{aligned}$$

Die Austauschenergie einer $N+1$ langen Kette ist somit:

$$\begin{aligned} Nu &= Js^2\left(\frac{\pi}{N}\right)^2 N && (18)\\ &= Js^2\frac{\pi^2}{N} && (19) \end{aligned}$$

Die Austauschenergie pro Flächeeinheit σ_{ex} ist somit:

$$\begin{aligned} \sigma_{ex} &= \frac{Nu}{a^2} && (20)\\ &= Js^2\frac{\pi^2}{Na^2} && (21) \end{aligned}$$

2.2 b

Die Gesamtenergieflächendichte der Austauschenergieflächendichte und Anisotropieenergieflächendichte σ_{an} ist

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_{ex} + \sigma_{an} && (22)\\ &= Js^2\frac{\pi^2}{Na^2} + \frac{KN}{a^2} && (23) \end{aligned}$$

Differenzieren nach N und Null setzen um die minimale Dicke zu bestimmen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\sigma}{\partial N} &= \frac{K}{a^2} - Js^2\frac{\pi^2}{N^2a^2} = 0 && (24)\\ \Rightarrow N_{min} &= s\pi\sqrt{J/K} && (25) \end{aligned}$$

Die Dicke der Bloch-Wände ist dann $d = N_{min}a$. Die Anisotropiekonstante K ist somit:

$$K = Js^2 \frac{\pi^2}{N_{min}^2} \tag{26}$$

In Aufgabe 1 sind angegeben $J = 2 \cdot 10^{-2} eV$ und $s = 1/2$. Bei Eisen wird als typischer Wert $N_{min} = 300$ angenommen, somit ist K:

$$K = 5,5 \cdot 10^{-7} eV$$

3 13.3

Der Extinktionskoeffizient γ ist gegben durch:

$$I(x) = I_0 \exp(-\gamma\omega x/c) \tag{27}$$

Nach $x = 5mm$ ist die Intensität auf die Hälfte abgefallen:

$$\frac{1}{2} = \exp(-\gamma\omega x/c) \tag{28}$$

$$\Rightarrow \gamma = -\ln(1/2)\frac{c}{\omega x} \tag{29}$$

Nach einsetzen der Zahlenwerte ($c = 300000km/s, \omega = 2\pi c/\lambda, \lambda = 937nm$):

$$\gamma = 2,07 \cdot 10^{-5}$$

Der Brechungsindex n hängt mit dem Reflektionskoeffizienten in diesem Fall wie folgt zusammen:

$$R = \frac{n-1}{n+1} \tag{30}$$

$$\Rightarrow n = -\frac{R+1}{R-1} \tag{31}$$

Mit $R = 0,25$ ergibt sich:

$$n = 1,67$$

Die komplexe Dielektrischekonstante setzt sich aus diesen beiden Größen zusammen:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2 \tag{32}$$

$$= (n + i\gamma)^2 \tag{33}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_1 = n^2 - \gamma^2 \quad \text{und} \quad \varepsilon_2 = 2n\gamma \tag{34}$$

Nach einsetzen der Werte erhält man:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$$
$$\varepsilon_1 = 2,78$$
$$\varepsilon_2 = 6,90 \cdot 10^{-5}$$